EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG 1957/58
II – 1 OKTOBER 1957

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EEN FENOMENOLOGISCHE INLEIDING TOT DE MEETKUNDE

door

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof

In hoofdstuk II van „L'enseignement des mathématiques" geeft E. W. Beth zijn visie op doel en betekenis van het wiskunde-onderwijs. Zeer belangrijk daarin is zijn uitspraak: „Le rôle de la formation mathématique dans l'enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive."

Het komt mij voor, dat wij bovengenoemde tese niet klakkeloos mogen aanvaarden. Wat nader bekeken moet worden is niet zozeer de betekenis van de deduktieve metode, als wel de vraag, of de vormende waarde van de wiskunde vrijwel uitsluitend of zelfs maar hoofdzakelijk in die deduktieve metode gezocht moet worden.

De wijze, waarop Beth zijn betoog houdt, kan zelf al als argument gebruikt worden tegen de genoemde stelling. Beth begint namelijk in genoemd hoofdstuk met een aantal postulaten, waarvan de beide eerste een relatie vermelden, die beperkt wordt door de uitdrukking „onder andere". Hij konkludeert uit deze postulaten, dat men een *vrij* intensieve wisselwerking zal mogen *verwachten* tussen de wiskunde-programma's der instellingen van het middelbaar en van het hoger onderwijs.

Het feit, dat de premissen geen logische relaties zijn, maakt, dat Beth zich in zijn konklusie voorzichtig uitdrukt. De suggestie, die in de verwachting besloten ligt, wordt niet door de logika gerechtvaardigd, ook al kiest Beth voor zijn redenering de vorm van een syllogisme. Hier nu ligt het gevaar van de door Beth geponeerde tese. Immers de bekendheid met de deduktieve metode mag er niet toe leiden, dat men, door zijn redenering in de *vorm* van syllogismen in te kleden, ten onrechte de indruk wekt, dat de konklusies exact zijn.

Wij behoeven er dus niet aan te twijfelen, dat er een zekere, belangrijke vormende waarde in gelegen is, dat de leerlingen vertrouwd zijn met de deduktieve metode. Deze vertrouwdheid kan hun in tweeërlei opzicht nuttig zijn: ten eerste om zich van deze metode in passende gevallen te kunnen bedienen en ten tweede om anderen halt te kunnen toeroepen, wanneer zij zich ten onrechte van deze metode bedienen.

Of de vormende waarde vrijwel uitsluitend uit de vertrouwdheid met de deduktieve metode zal bestaan, mag ernstig betwijfeld worden. Beth is tot deze konklusie gekomen, doordat hij de didaktiek der wiskunde als een probleem ziet, dat voornamelijk bepaald wordt door de wiskunde zelf en door de psychologie. Hij houdt er dus geen rekening mee, dat bij het bepalen der opvoedingsdoelen ook de pedagogiek met een hele reeks determinerende faktoren van speciale eigen aard optreedt. De psychologie wordt door hem spoedig opzij geschoven, omdat deze niet in staat is gebleken bevredigende axiomatische grondslagen voor de wiskunde te leveren. Ook dit argument schijnt mij weinig ter zake te zijn. Nu op deze wijze de matematicus zelf de enige is, die beslissen mag over de opvoedingsdoelen van het wiskunde-onderwijs, is het duidelijk, of in ieder geval begrijpelijk, dat vertrouwdheid met de deduktieve metode als voornaamste opvoedingsdoel gezien wordt.

Met de kennisneming van de deduktieve metode zal de leerling moeten leren begrijpen, onder welke voorwaarden een dergelijke metode mogelijk is. Dit zal kunnen gebeuren door een fenomenologische aanpak, waarvoor het begin van de meetkunde zich zeer biezonder leent.

Op het moment, dat voor de leerlingen het meetkunde-onderwijs begint, zijn zij met de objekten, waarover dit onderwijs handelt, niet geheel en al onbekend. De meetkunde houdt zich immers bezig met de bestudering van de ruimte, en de leerlingen hebben van jongs af met de ruimte te maken gehad. Weliswaar wordt nu de ruimte in een zeer biezondere samenhang, de meetkundige kontekst, bestudeerd, maar dat neemt niet weg, dat de leerling bij zijn studie steeds weer genoodzaakt wordt terug te grijpen op zijn vroegere ervaringen.

Het schijnt, dat men wel eens geprobeerd heeft zulk een teruggrijpen tegen te gaan, omdat men de relaties met de ervaringswereld ongewenst achtte voor de ontwikkeling van het abstrakte denken. Wie tot zulk een vorm van meetkunde-onderwijs wil overgaan, moet wel over zeer stellige gegevens beschikken, dat hij dit kan doen zonder het kind in zijn ontwikkeling ernstig te schaden. Het gevaar is immers zeer groot, dat het geheel van de wijs zal raken, wanneer het naast de ervaringswereld te maken krijgt met een kunstmatig opgebouwd gebied, waarin ideële objekten optreden, die dezelfde namen dragen als die van de ervaringswereld, en waarin overeenkomstige relaties gelden, terwijl het kind toch het een niet met het ander in verband mag brengen.

Daar mij niet bekend is, dat zulk een meetkunde-onderwijs, los

van elke ervaring, ooit gelukt is, terwijl ook het bovengenoemde bezwaar tegen een dergelijk onderwijs niet weerlegd is, zal ik in het verdere betoog er van uitgaan, dat wij in het meetkunde-onderwijs rekening moeten houden met de vroegere ervaringen van het kind. Men zal dan een onderwijs moeten geven, dat in het begin niet wiskundig is, maar dat, zoals ik in een vroeger artikel (Eucl. XXXII, blz. 277) aantoonde, een grote vormende waarde heeft.

Daar het kind vele jaren de voorwerpen in de ruimte heeft waargenomen en zich in de ruimte heeft leren bewegen, heeft het kennis genomen van vele ruimtelijke relaties. Deze relaties, zoals voor-achter, boven-onder, past in, ver-dichtbij, hoog-laag, zijn echter van geheel andere aard dan de logische relaties der meetkunde, ofschoon zij dikwijls wel deel uitmaken van overeenkomstige strukturen. In een logisch deduktief systeem treedt als belangrijkste relatie het „volgen uit" op, waarbij „uit A volgt B" ekwivalent is met de uitspraak, dat het tegelijkertijd voorkomen van „A" en „niet B" uitgesloten is. De relaties, waar het kind in de ruimte mee te maken gehad heeft, hebben een veel minder dwingend karakter: zij duiden niet méér aan, dan dat het verschijnsel A veelvuldig begeleid wordt door het verschijnsel B.

Het is van grote betekenis, dat wij dit onderscheid tussen de relatietypen scherp in het oog houden, vooral, omdat ook de tweede relatie wel eens aangeduid wordt met de naam „volgen uit". Maakt men dit onderscheid niet, dan kan het gebeuren, dat er in de wiskunde misverstanden optreden, doordat men aan het „volgen uit" niet de strenge eisen stelt, die *daar* noodzakelijk zijn. Zo werd eens (h.b.s. 1940) de vraag gesteld: „Indien in een driehoek de betrekking geldt: $\cos C = - \cos 4B$, volgt daar dan uit, dat $A = 3B$?" Als antwoord werd toen gegeven (Kruytbosch): „Ja, de gevolgtrekking is juist, maar ook: $A = 3B - 360°$, $A = 360° - 5B$, $A = 720° - 5B$". Deze uitspraak is niet in overeenstemming met de *logische* inhoud van „volgen uit". Het antwoord had moeten luiden: „De gevolgtrekking is onjuist. Juist zou zijn de gevolgtrekking, dat een der vier volgende relaties moet gelden: $A = 3B$, $A = 3B - 360°$, $A = 360° - 5B$, $A = 720° - 5B$."

Het is deze strenge eis, die aan het logische „volgen uit" gesteld moet worden, welke het onderwijs in de meetkunde zo moeilijk maakt. De wezenlijke inhoud van tal van redeneringen in de wiskunde gaat aan de leerlingen voorbij, omdat zij van het „volgen uit" slechts een globale inhoud kennen. De betekenis van een definitie, het verschil tussen een stelling en zijn omgekeerde, een bewijs uit het ongerijmde, zijn alle on- of slechts ten dele begrijpelijk voor het

kind, dat van de logische relatie „volgen uit" niet de juiste voorstelling heeft.

Bij het onderwijs van het begin van de meetkunde staat de leraar dus voor een dubbele opgaaf:

1. Hij moet uitgaande van de kennis, die het kind van ruimtelijke ordeningen bezit, dit kind de matematische ruimtelijke ordeningen doen ervaren.

2. Hij moet het kind laten ervaren, in hoeverre matematische relaties verschillen van die, waarmee het tot dan toe te maken heeft gehad.

Deze dubbele opgaaf kan op zeer elegante wijze worden opgelost in een inleidende kursus. Voordat ik tot een beschrijving daarvan overga, zal ik een opsomming geven van de ordeningsstrukturen van de ruimte, waarmee het kind in meerdere of mindere mate globaal bekend kan zijn. Deze strukturen zijn vooral van betekenis, omdat het uitbreiden en analyseren ervan voor de meeste leerlingen op zichzelf nuttig is. Hiermee wil ik zeggen, dat deze uitbreidingen ook nuttig zijn voor het merendeel van die leerlingen, van wie men kan betwijfelen, of het vertrouwd zijn met de deduktieve metode veel waarde heeft. De strukturen bepalen dus ook grotendeels de meetkundige aspekten, die in de eerste jaren van het meetkundeonderwijs aan de orde zouden moeten komen. Hier volgen ze:

a. Het herkennen en benoemen van meetkundige figuren.
b. Vlak- en ruimteverdelingen.
c. Het gebruik en de plaatsing van kongruente figuren.
d. Gelijkvormige figuren.
e. Stapelingen van figuren.
f. Transformaties van figuren.
g. Symmetrie ten opzichte van een plat vlak.
h. Symmetrie ten opzichte van een lijn.
i. Symmetrie ten opzichte van een punt.
j. Oppervlakte en inhoud.
k. Bewegingen in de ruimte: verschuiving, draaiing, schroefbeweging.
l. Baankrommen.
m. Het in het algemeen niet kongruent zijn van ruimtefiguren, die elkaars spiegelbeeld zijn.
n. Afbeeldingen van de ruimte op een plat vlak.
o. Doorsnijdingen van figuren.

Het artikel zou veel te uitgebreid worden, wanneer ik hier bij ieder punt zou aanduiden, hoe deze strukturen al globaal bij de

meeste leerlingen aanwezig zijn en waarom de analyse van deze strukturen bijdraagt tot hun vorming. Ik zal mij daarom beperken tot enkele onderdelen.

Het punt *b* houdt verband met tegel- en parketvloeren, met de verdeling van de ruimte in kuben, in regelmatige zeszijdige prisma's (honingraat).

Bij *e* kan men denken aan een volledige opvulling van de ruimte, zoals bij de stenen van een muur, men kan ook denken aan stapelingen, waarbij er ruimte overblijft, zoals de stapeling van al of niet kongruente bollen. Ook kunnen lichamen door stapeling van andere lichamen verkregen worden. Een huis kan b.v. gedacht worden als de stapeling van een rechthoekig parallelepipedum en een afgeknot driezijdig prisma. Ook het opbouwen van een lichaam uit zijn netwerk kan als een zeer biezondere vorm van stapeling beschouwd worden.

De punten *b* en *e* vertonen wel veel overeenkomst, maar moeten toch als verschillend gezien worden. Bij de struktuur *b* gaat men uit van het totaal en splitst in al of niet kongruente delen, bij de struktuur *e* wordt uit delen een totaal opgebouwd, dat niet a priori bekend hoeft te zijn. De struktuur *b* vormt op de L.S. de basis voor het begrip breuk, de struktuur *e* vormt daar de basis voor de optelling en vermenigvuldiging.

Het punt *f* houdt verband met het zien: een vierkant kan zich in de visuele waarneming voordoen als een trapezium, rechthoek, ruit, willekeurige vierhoek, enz. Het houdt ook verband met mechanische transformaties: samendrukking, verbuiging, enz.

De punten *g*, *h* en *i* zijn van belang, als men figuren uit de natuur of de techniek gaat bestuderen. Zij houden ook een estetisch element in: een symmetrische opstelling doet vaak „stijf" aan, een figuur, die een as van symmetrie, maar geen vlak van symmetrie heeft, doet „dynamisch" aan, enz.

Een struktuur, zoals bedoeld in *o*, kan ontstaan zijn bij het waarnemen van de werking van een snijmachine voor vleeswaren, e.d. Deze struktuur kan uitstekend benut worden bij de toepassing van het principe van Cavalieri.

Het komt mij absurd voor, als men zou menen, dat deze oorspronkelijk globale strukturen in het meetkunde-onderwijs geen rol zouden moeten spelen. De leraar kan natuurlijk in zijn onderwijs het bestaan van die strukturen totaal negeren. Een aantal van zijn leerlingen zullen echter tussen de wiskundige strukturen en de hiervoor genoemde strukturen globale isomorfieën ontdekken en daarvan een dankbaar gebruik maken. Van de overigen zullen vele

de beschikking krijgen over een slecht funktionerend globaal rekenapparaat, dat, daar het iedere binding met de waarneming mist, ook niet of moeilijk toegepast kan worden.

Het begin van het meetkunde-onderwijs zal erin moeten bestaan, dat men een of meer (maar vooral niet te veel tegelijk) van deze onderwerpen onder de aandacht van de leerlingen brengt en gaat bespreken in een meetkundige kontekst. Hiermee wordt een tweeledig doel beoogd. In de eerste plaats worden door het gesprek over het onderwerp de betekenissen van de daarin optredende begrippen en hun onderlinge relaties vastgelegd. Misschien is het beter te zeggen, dat de betekenissen van die begrippen juist *door* hun onderlinge relaties worden vastgelegd. Voor het vastleggen van de begrippen door middel van definities is nog geen mogelijkheid, omdat, zoals Kohnstamm zo treffend opmerkt (Keur, blz. 84) „een definitie van een begrip een zodanige beschrijving ervan is, dat de plaats, die aan dit begrip binnen een als gegeven aanvaard begrippenstelsel toekomt, aldus eenduidig bepaald is". We moeten dus beginnen ervoor te zorgen, dat er een voldoende afgebakend begrippenstelsel ontstaat, waarbij we voorlopig moeten afzien van het gebruik van definities, maar waarbij we zó duidelijke voorbeelden moeten kiezen, dat een ieder direkt de bedoelde begrippen herkent.

In de tweede plaats maken wij door de keuze van de relaties duidelijk, wat het typische van de meetkundige kontekst is. Wij hebben dus hier wel iets heel anders op het oog dan het blindelings klassificeren volgens kenmerken, die aan de waarneming ontleend zijn. Dit zou voor het kind niets nieuws betekenen: het ordenen en klassificeren volgens waargenomen kenmerken is essentieel voor het menselijke denken en het kind heeft dit al (gedeeltelijk onbewust) van zijn prilste jeugd af gedaan. De tweede doelstelling houdt zeer nauw verband met de eerste: het begrippenveld wordt even scherp afgebakend door de kontekst, waarin de relaties optreden als door die relaties zelf.

We hebben hier te maken met een fenomenologische analyse van de ruimte in een zeer speciale (nl. de meetkundige) kontekst. Kinderen van ongeveer twaalf jaar zijn heel goed in staat deze kontekst te begrijpen, omdat de oorspronkelijk zeer komplexe ruimtelijke strukturen zich bij hen door de medemenselijke verhoudingen reeds lang in verschillende richtingen gedifferentieerd hebben. We behoeven er bijvoorbeeld niet voor te vrezen, dat de leerlingen de ook zeer belangrijke emotionele belevingen van de ruimte mede in het geding zullen brengen. Ik noem deze mogelijkheid hier, omdat de fenomenologische analyse in het biezonder toegepast wordt om

objektiviteit te kunnen verkrijgen over emotionele belevingen. Dit is hier zeker niet onze bedoeling. Maar zoals opgemerkt werd: ofschoon de werkwijze overeenkomstig is, is verwarring bij de leerlingen vrijwel uitgesloten.

Wanneer na enige tijd de begrippen voldoende vastgelegd zijn, kan men beginnen de leerlingen deze te laten omschrijven. De eigenschappen, die de behandelde meetkundige figuren bezitten, worden daarbij achtereenvolgens opgenoemd. Hierdoor worden deze eigenschappen discursief expliciet. De figuur wordt dan de representant van al deze eigenschappen. Zij krijgt daardoor, wat wij in het vervolg met „*symboolkarakter*" zullen aanduiden. In dit stadium betekent dan het „begrijpen" van de figuur het kennen van al deze eigenschappen als een eenheid.

Zo bezit een „gelijkbenige driehoek" de eigenschappen, dat hij een symmetrie-as bezit, dat hij twee gelijke zijden heeft en dat hij twee gelijke hoeken heeft. Het begrijpen, dat in het symboolkarakter opgesloten is, stelt de leerlingen reeds in staat tot eenvoudige logische operaties. Er is sprake van een volledige ekwivalentie: niet alleen heeft een „gelijkbenige driehoek" de hierboven genoemde eigenschappen, maar ook zullen we een figuur, die al deze eigenschappen heeft, op grond daarvan steeds „gelijkbenige driehoek" mogen noemen.

Het symbool verleent aan het denken de nodige steunpunten: wanneer eenmaal uitgemaakt is, dat een figuur „gelijkbenige driehoek" is, dan weet het kind ook, dat er een aantal eigenschappen moeten gelden, zonder dat het in dit speciale geval deze eigenschappen behoeft te memoriseren. De eigenschappen kunnen in het begin uit de voorstelling worden afgelezen, het symbool heeft dan het karakter van een „image" (zie Meyerson, Les Images blz. 582). Op den duur zullen de eigenschappen meer rechtstreeks door het woord opgeroepen worden.

Omdat de begrippen in dit stadium nog door het totaal der eigenschappen, die eraan verbonden zijn, bepaald worden, kan er nog maar op zeer eenvoudige wijze logisch mee geopereerd worden. Men kan bv. besluiten, dat een halve ruit een gelijkbenige driehoek is, omdat men in de halve ruit de eigenschappen van de gelijkbenige driehoek terugvindt. Meestal zal men pas kunnen oordelen, dat een figuur met een bepaald symbool kan worden aangeduid, doordat men het bezit van de betrokken eigenschappen aan de empirie ontleent. In dit stadium wordt dus de relatie tussen de meetkunde en de waarneming versterkt, daarentegen worden op logisch terrein nog slechts weinig vorderingen gemaakt.

Wanneer het symboolkarakter van vele meetkundige figuren aan de leerlingen voldoende duidelijk is geworden, is het mogelijk, dat deze ook een *signaalkarakter* krijgen. Dit houdt in de eerste plaats in, dat de symbolen door de routine anticipeerbaar geworden zijn. Het kind kan dan, op grond van het feit, dat een figuur een deel der eigenschappen van een ruit bezit, gaan vermoeden inderdaad met een ruit te doen te hebben. Maar we zullen pas met recht kunnen zeggen, dat de figuren als signalen fungeren, wanneer het kind zich met behulp van de eigenschappen der figuren in de meetkunde weet te *oriënteren.*

Als deze oriëntatie voldoende ontwikkeld is, wanneer de figuren voldoende als signalen optreden, dan voor het eerst begint de meetkunde beoefenbaar te worden als logisch vak. De oriëntatie houdt nl. in, dat het kind gaat inzien op grond van *welke kombinaties* van zijn eigenschappen tot het bestaan van een zekere meetkundige figuur besloten kan worden. Dan is dus het kind in staat een ruit te herkennen, doordat het weet te doen te hebben met een vierhoek. waarvan alle zijden aan elkaar gelijk zijn, of doordat het weet, dat het een vierhoek voor zich heeft, waarvan de diagonalen elkaar loodrecht doormidden delen.

Men moet in dit stadium de mogelijkheden tot logisch denken vooral niet overschatten. Nog steeds zijn de *figuren* objekt van het denken, *niet* de *relaties* tussen deze figuren en nog veel minder de *aard* van die relaties. Het kind is nu in staat in een zekere figuur te besluiten tot de gelijkheid van twee hoeken, doordat deze beschouwd kunnen worden als overstaande hoeken van een ruit (wegens het symboolkarakter van de ruit), terwijl het bv. tot het bestaan van de ruit gekonkludeerd heeft op grond van het feit, dat het een vierhoek voor zich heeft, waarvan de diagonalen elkaar loodrecht doormidden delen (signaalkarakter van de ruit). Maar het is niet waarschijnlijk, dat een kind op dit niveau het geheel van de redenering *overziet*, omdat de *relaties* tussen de figuren nog geen symbool- en signaalkarakter verkregen hebben.

Dat figuren een symbool- en signaalkarakter bezitten, is reeds lang bekend. Een figuur, waarvan het symbool- en het signaalkarakter steeds ingestudeerd wordt, is het parallellogram. Maar voor de oriëntatie in de meetkunde komt deze figuur meestal veel te laat. In bijna iedere meetkunde-leergang wordt vóór het parallellogram de kongruentie van driehoeken behandeld. Dan is men dus al met de studie van de relaties zelf begonnen, hetgeen veronderstelt, dat de leerling zich al in de meetkunde weet te oriënteren.

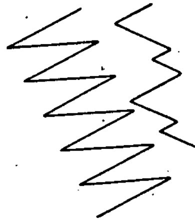
Nadat de leerlingen het eerste denkniveau van de meetkunde

bereikt hebben, d.w.z., wanneer zij zich in de meetkunde weten te oriënteren met behulp van de eigenschappen van vele figuren (ruiten, rechthoeken, gelijkbenige driehoeken, regelmatige veelhoeken, enz.), wanneer dus deze figuren voor hen een symbool- en een signaalkarakter gekregen hebben, dan pas is het mogelijk, dat voor hen de relaties tussen de figuren objekt van studie worden. Dan kunnen dus deze *relaties* een symbool- en later een signaalkarakter krijgen. Dan kan men zich dus verdiepen in de eigenschappen van de kongruentie, van de spiegeling, de gelijkvormigheid de evenwijdigheid, enz. Daarbij gaat het in dit stadium nog om de *extrinsieke* eigenschappen van deze relaties, dus om de eigenschappen van kongruente driehoeken, gelijkvormige ruiten, evenwijdige lijnen, driehoeken die elkaars gespiegelde zijn t.o.v. zekere lijn, enz. De studie van de *intrinsieke* eigenschappen van de relaties voert tot het derde denkniveau.

Aan het symbool- en het signaalkarakter van de relaties wordt op vele plaatsen in de meetkunde aandacht besteed. Zo behoort het tot het symboolkarakter van de relatie „lijn loodrecht vlak", dat de lijn loodrecht staat op *alle* lijnen van dat vlak, tot het signaalkarakter van deze relatie behoort, dat de lijn slechts loodrecht behoeft te staan op twee elkaar snijdende lijnen van dat vlak om tot de relatie te kunnen besluiten. Wat uit de bestaande meetkundeleergangen in het algemeen niet blijkt, is, dat men er voldoende rekening mee houdt, dat het kind niet direkt het signaalkarakter van relaties kan begrijpen en er ook niet direkt mee kan opereren. In de traditionele leergangen wordt bv. het signaalkarakter van „evenwijdige lijnen" vrijwel tegelijk met het symboolkarakter zeer in het begin van de meetkunde ten tonele gevoerd.

Zodra het signaalkarakter van een figuur voor de leerlingen betekenis gaat krijgen, gaat ook het „volgen uit" in zijn eigenlijke vorm zijn rol meespelen. Immers nu *volgt uit* de gelijkheid van de paren overstaande zijden van zekere vierhoek, dat deze een parallellogram is en daaruit „volgt weer", dat in die vierhoek de diagonalen elkaar middendoor delen, overstaande hoeken gelijk zijn en overstaande zijden evenwijdig zijn. Het eerste *volgen uit* heeft de betekenis, die wij daar gewoonlijk aan hechten en is ook niet vanzelfsprekend omkeerbaar, het tweede „volgen uit" heeft een meer psychologische inhoud: het duidt de identifikatie aan van de naam van de figuur met het totaal van zijn eigenschappen. Van logisch standpunt bezien zou men het tussenstation „deze vierhoek is een parallellogram" best kunnen missen; de onderwijspraktijk heeft ons echter geleerd, hoe zeer de leerlingen daaraan behoefte hebben.

De grote reële betekenis van dit tussenstation voor de leerlingen blijkt vooral, wanneer wij er ook bij het hoofdstuk „evenwijdigheid" enkele gaan inlassen. Noemt men onderstaande figuur een „zaag", dan behoort het tot het symboolkarakter van de zaag, dat



hij de volgende eigenschappen heeft: *a.* Er komen twee stelsels evenwijdige lijnen in voor, *b.* Alle hoeken van de zaag zijn aan elkaar gelijk. Het signaalkarakter van de zaag wordt erdoor gekenmerkt, dat elk van de eigenschappen *a* en *b* afzonderlijk voldoende is om tot het bestaan van de figuur „zaag" te kunnen besluiten. Door het inschakelen van het tussenstation wordt voorkomen, dat de leerlingen de stelling met zijn omgekeerde gaan verwarren.

Hoewel wij hier een middel hebben aangegeven om te *omzeilen* dat de leerlingen niet het juiste gebruik zullen maken van stellingen en hun omgekeerden, moeten wij ons toch realiseren, dat zij dit onderscheid nog niet hebben leren maken en daarom in het algemeen ook niet *kunnen* maken. Het signaalkarakter der meetkundige figuren vormt een *inleiding* tot het leren van dit onderscheid. Wanneer de leerlingen het signaalkarakter van allerlei figuren gaan onderzoeken, dan zullen zij ontdekken, dat sommige kombinaties van kenmerken wel de gewenste figuur opleveren en andere kombinaties niet. Het evenwijdig zijn van een paar zijden van een vierhoek en het gelijk zijn van het andere paar zijden is samen nog niet voldoende om zeker te zijn, dat we een parallellogram voor ons hebben.

Het signaalkarakter van de meetkundige figuren stelt de leerlingen in staat met deze figuren te opereren. Bij deze operaties treden ook relaties als objekt op, nl. de eigenschappen, die een figuur bezit en de eigenschappen, welke een figuur bepalen. Het opereren zal des te soepeler verlopen, naar mate de leerlingen de eigenschappen, die naar een meetkundige figuur voeren (dus die tot het signaalkarakter behoren) en die, welke de meetkundige figuur bezit (dus die tot het symboolkarakter behoren) meer als een totaliteit gaan zien. Dit totaliteitskarakter zal op den duur ten gevolge hebben, dat er een rechtstreekse verbinding tot stand komt tussen de relaties,

die naar de figuur voeren en die, welke er uit volgen. De figuur zelf kan steeds meer naar de achtergrond geschoven worden en ten slotte blijft alleen de naam over als symbool voor een groep van syllogismen. Bij de „zaag" wordt ook meestal de naam niet meer geëxpliciteerd en wordt een rechtstreeks verband gelegd tussen gelijkheid van verwisselende binnenhoeken en evenwijdigheid van lijnen.

Uit het voorgaande kan duidelijk zijn geworden, hoe door kondensatie van de begrippen het symbool- en signaalkarakter van de *figuur* „zaag" kan worden geabstraheerd tot het symbool- en signaalkarakter van de *relatie* „evenwijdigheid". Andere relaties, zoals kongruentie en gelijkvormigheid kunnen pas symbool worden, wanneer de figuren, waartussen de relaties gelden, zelf voldoende symbool- en signaalkarakter verkregen hebben. *Zulke* relaties behoren niet aan de orde gesteld te worden, voor men zekerheid heeft, dat vrijwel alle leerlingen het eerste denkniveau bereikt hebben.

Pas wanneer de leerling zover is, dat hij het signaal- en het symboolkarakter van een figuur als een totaliteit kan zien, is hij in staat het „volgen uit" in zijn extrinsieke betekenis te begrijpen. Hij weet en overziet dan, dat een vierhoek, waarin de diagonalen elkaar middendoor delen, een parallelogram is en dat men daarom o.a. kan besluiten, dat één paar zijden van die vierhoek evenwijdig is en dat het andere paar gelijk is. Hij weet echter ook, uit ervaring, dat niet iedere kombinatie van eigenschappen tot een parallellogram voert en hij kan dus ook begrijpen, dat in een vierhoek, waarvan één paar zijden evenwijdig is en waarvan het andere paar gelijk is, de diagonalen elkaar nog niet noodzakelijk zullen halveren. M.a.w., nadat hij geleerd heeft, hoe aan relaties een dwingend karakter kan worden gegeven, ervaart hij, hoe dit dwingend karakter soms slechts in één richting bestaat.

Het begrijpen van de intrinsieke eigenschappen van het „volgen uit" komt pas veel later aan de orde. Dáárvoor is noodzakelijk, dat ook de relaties zelf symbool- en signaalkarakter gekregen hebben. Wanneer dan de intrinsieke ordeningsprincipes van begrippen, zoals „volgen uit" bestudeerd worden, dan kunnen daar weer globale strukturen ontstaan, waarin op den duur symbolen en signalen ontwikkeld worden. Dit loopt dan uit op het derde denkniveau van de meetkunde. Dan bestaat er inderdaad niet veel verschil meer tussen de meetkunde en de formele logika. Maar men zal moeten toegeven, dat de weinige leerlingen, die zich tot dit denkniveau weten op te werken, een lange denkweg hebben moeten afleggen.

Wie de hierboven geschetste ontwikkeling nauwkeurig gevolgd heeft, zal inzien, dat het weinig zin heeft in het begin van het meetkunde-onderwijs de relatie „volgen uit" te laten optreden. De relatie kan dan immers voor de leerlingen nog niet de inhoud hebben, die voor het juist opereren met deze relatie noodzakelijk is. En nog veel duidelijker is de onmogelijkheid om in het begin van het meetkunde-onderwijs een logisch deduktief systeem te ontwikkelen. Om zulk een ontwikkeling te kunnen begrijpen is het immers nodig, dat ook groeperingen en sekwenties van syllogismen als totalen gezien worden en dat deze totalen een symbool- en een signaalkarakter verkregen hebben.

Het komt mij voor, dat het globale karakter van de relaties, die de grondslag voor een teorie vormen, essentieel is. Wanneer men in een later stadium van de ontwikkeling de globale relaties, die aan de empirie zijn ontleend en die tot dan toe de grondslag van de meetkunde gevormd hebben, gaat door analyseren, dan kan men tot een axiomasysteem komen. De oorspronkelijk globale relaties hebben dan een logische fundering gekregen. Dit houdt in, dat zij in het relatienet wel hun zelfde plaats behouden kunnen hebben, maar dat zij daar op een andere wijze funktioneren: zij hebben hun logische betekenis gekregen. Het axiomasysteem, dat de fundering vormt, bevat echter nog steeds globale elementen.

Wanneer men in het begin van het meetkunde-onderwijs de leerlingen voorzichtig laat *wennen* aan een logisch deduktief systeem, zonder dat men evenwel de relaties, aan de waarneming ontleend, laat analyseren, dan stuurt men aan op de vorming van *globale* strukturen, die het *uiterlijk* van wiskundige strukturen hebben. De strukturen zijn globaal, omdat zij niet door analyses samenhangen met andere strukturen. Is de leraar begonnen met axioma's, dan vormen zich in het begin slechts *verbale* strukturen, omdat de leerlingen zich dan nog niet weten te oriënteren. Later zullen de *handelingen* van de leraar voor de leerling een globale struktuur krijgen. Het kan echter ook zijn, dat de leraar het eerste axiomatische deel *overslaat* en *bewust* aanstuurt op de vorming van globale pseudowiskundige strukturen.

In beide gevallen speelt hij echter een gevaarlijk spel. Op de globale strukturen ontwikkelen zich nieuwe handelingsstrukturen, die door middel van symbool- en signaalvorming steeds automatischer gaan verlopen. De oorspronkelijke globale strukturen verliezen daardoor hun betekenis en maken een grote kans verloren te gaan. Deze gang van zaken zal aan vele wiskundeleraren bekend zijn. Een goed voorbeeld ervan vormen de breuken, die vele leerlingen op de

lagere school niet door eigen belevingen met de waarnemingswereld verbonden hebben gezien. Bij het toelatingseksamen blijken deze leerlingen meestal niet meer van breuken te weten dan een aantal rekenwijzen.

Wanneer de meetkunde gebaseerd is op oorspronkelijk globale *waarnemingsstrukturen*, dan is de kans, dat deze basis verloren gaat, veel kleiner. De waarnemingsstrukturen blijven immers hun zin behouden, ook al hebben zich daaruit zeer abstrakte denkstrukturen en zeer automatisch verlopende handelingsstrukturen ontwikkeld. Het zal dan ook mogelijk zijn, te gelegener tijd deze waarnemingsstrukturen in de richting van axioma's door te analyseren. Een uitgaan van de waarnemingsstrukturen biedt daarom een betere gelegenheid tot het vertrouwd worden met de deduktieve metode dan een aanvangsmeetkunde, die van meet af schijnbaar deduktief is.

De bewering, dat een meetkunde, die steunt op waarnemingsstrukturen, gebaseerd is op experimenten, lijkt mij niet juist. Ook het onderzoek, dat de leerlingen doen, wanneer zij beproeven, of een vloer belegd kan worden met kongruente ongelijkzijdige driehoeken, draagt niet het karakter van een experiment. Zij gaan niet nauwkeurig na, of alles wel past en zij onderzoeken ook niet, of het met iedere driehoek zal passen. Na een aantal driehoeken aan elkaar gelegd te hebben, herkennen zij de struktuur van het totaal, dat gevormd wordt. Zij zien bv. een systeem van parallellogrammen verschijnen of enige stelsels van rechte lijnen, of dikwijls nog veel primitiever strukturen. Ook in de verdere omstruktureringen komt de vraag, of de strukturen, waarvan men uitging, de ruimte nauwkeurig afbeelden, weinig aan de orde.

De hiervoor aangeduide wijze om het meetkunde-onderwijs te beginnen heeft het voordeel, dat de leerlingen ervaren, hoe men een kennisgebied, waarvan men globale strukturen bezit, door analyse voor objektieve beschouwingen toegankelijk kan maken. De hier voor de meetkunde aangegeven weg kan nl. ook voor andere kennisgebieden gebruikt worden. Of het daar ook mogelijk zal zijn het kennisveld tenslotte te matematiseren, hangt van de aard van het veld af. Noodzakelijk daarvoor is immers o.a., dat de relaties niet gedenatureerd worden, wanneer zij in logische relaties worden omgezet. Voor hen, die aan deze werkwijze eens aktief hebben deelgenomen, zal het gemakkelijker zijn de grenzen te herkennen dan voor hen, die het logisch deduktieve systeem als een kant en klaar gegeven hebben moeten aanvaarden. We hebben hier dus te doen met een vormende waarde, die verkregen kan worden door het onderwijs in het begin van de meetkunde.

Vooral met het oog op het onderwijsdoel is dit laatste van grote betekenis. Een groot deel van de leerlingen der lycea bereikt de eindstreep niet en een nog groter deel krijgt later geen hoger onderwijs. Het is daarom zeer de vraag, of het verantwoord is het aanvangsonderwijs van de meetkunde te richten op een doel, dat in het hoger onderwijs ligt. Vooral, wanneer dit doel meer speciaal geldt voor hen, die hoger onderwijs in een der exacte wetenschappen zullen volgen. Het is dus wel een zeer gelukkige omstandigheid, dat de hiervoor gaande analyse uitwijst, dat de onderwijsmetode, die het best voorbereidt op het logisch deduktieve systeem, ook een belangrijke vorming biedt aan de grote groep van diegenen, voor wie vertrouwdheid met dat systeem van twijfelachtige waarde is.

Uit de voorgaande analyse blijkt, dat de ontwikkeling van het logische denken beschouwd moet worden als het resultaat van een leerproces. De ervaringen van leraren, opgedaan bij onderwijsprocessen, zullen dit bevestigen. Het is belangrijk dit in het oog te houden, wanneer men de resultaten interpreteert van testproeven bij kinderen, die de ontwikkeling van het logische denken betreffen. Wat men voor zich krijgt, zijn niet de uitingen van een spontane (biologische) ontwikkeling, maar de resultaten van incidentele leerprocessen, die optreden bij de omgang van het kind met meer ervaren personen. Bovendien wijst de analyse uit, dat het kind niet handelt op grond van logische, maar op grond van globale strukturen. Ik denk hierbij in het biezonder aan de onderzoekingen, of kinderen in staat zijn sluitredenen te vormen, of in staat zijn op „juiste" wijze te definiëren. (Zie hiervoor ook Kohnstamm, Keur blz. 81 e.v.).

De eis, die Beth aan de te onderwijzen stof stelt, nl. dat deze voor leraren voldoende interessant moet zijn om met overtuiging gegeven te kunnen worden, is volkomen reëel en billijk. Ik kan mij voorstellen, dat vele leraren zich niet geroepen zullen voelen met hun leerlingen te gaan „fröbelen": knippen, plakken en vouwen. Ik kan mij echter moeilijk indenken, dat de leraren door hun opleiding in logisch deduktieve zin zozeer iedere binding met de stoffelijke wereld zouden hebben verloren, dat zij niet meer de belangstelling zouden kunnen opbrengen de strukturen van deze stoffelijke wereld bij de kinderen tot logische strukturen te helpen omvormen.

De ontwikkeling van het symbool- en signaalkarakter der meetkundige figuren, van het symbool -en signaalkarakter der meetkundige relaties en ten slotte van het inzicht in het logische stelsel heb ik in een vroegere publikatie (Paed. Stud. XXXII, blz. 289 e.v.)

ENKELE ANALYTISCHE FACETTEN VAN DE GONIOMETRIE [1])

door

Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ

§ 1. *Inleiding.*

Aanleiding tot de keuze van dit onderwerp was enerzijds de weinig omlijnde en in sommige opzichten slecht functionerende plaats van het *vak* goniometrie bij het V.H.M.O. en anderzijds de moeilijkheden rond de introductie van de goniometrische functies in de eerstejaars colleges, hetzij in de analyse, hetzij in de meetkunde, gesteld dat we op deze onderscheiding tenminste nog prijs stellen. We zullen deze functies nu achtereenvolgens bezien vanuit het standpunt van de analyse en van de meetkunde; van een gemengd standpunt en van een abstract standpunt.

§ 2. *Standpunt 1: de analyse.*

Op de meest natuurlijke wijze komen de goniometrische functies in de analyse voor als reële en imaginaire deel van de functie e^{ix} voor reële waarden van x. Uit de definities

(2.1) $$\sin x = \text{Im}\,(e^{ix}), \quad \cos x = \text{Re}\,(e^{ix})$$

is de klassieke goniometrie direct af te leiden. We hebben de vraag verschoven naar de definitie van de exponentiële functie, hiervoor zullen we veelal gebruiken

(2.2) $$e^{ix} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ix)^\nu}{\nu!}.$$

Een bezwaar van deze introductie is dat zowel de complexe getallen als de theorie van de machtreeksen bekend verondersteld moeten worden.

En een docent in de analyse zal juist bij veel voorbeelden over continuiteit, doorlopendheid, differentieerbaarheid gebruik willen maken van de goniometrische functies, lang voordat complexe getallen en (of) machtreeksen aan de orde gesteld zijn.

Een definitie met reële machtreeksen:

---

[1]) Voordracht, gehouden op de algemene vergadering van „Wimecos" op 27 december 1956.

eens de ontwikkeling tot het eerste, tweede en derde denkniveau van de meetkunde genoemd. De nadere analyse van die niveaus heeft aan het licht gebracht, dat in ieder volgend denkniveau een hogere trap van formeel logisch denken vereist wordt. Zodat de konklusie van dit artikel toch weer leidt tot een overeenstemming met dat van Beth. Het is nl. juist, dat kennis van de formele logika tot beter begrip kan leiden van zeer veel voorkomende moeilijkheden in het meetkunde-onderwijs en dus kan voeren tot een betere didaktiek. Dat desondanks Beth niet is gekomen tot juiste konklusies voor die didaktiek, komt, omdat hij zijn startpunt verkeerd gekozen heeft: hij had moeten uitgaan van de leersituaties.

WISKUNDE WERKGROEP W.V.O.

Het tiende konferentieweekeinde van de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. zal dit jaar op zaterdag 19 en zondag 20 oktober 1957 gehouden worden in het konferentieoord „De Grasheuvel" te Amersfoort. De algemene leiding berust bij de voorzitter van de groep, Prof. Dr. H. Freudenthal, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

Het centrale onderwerp luidt:

„De aansluiting van het rekenonderwijs op de Lagere School tot het Algebra-onderwijs op de Middelbare school."

Als sprekers hebben toegezegd:

J. Jonges,	direkteur van de Kweekschool van het Haagse Genootschap,
Chr. Boermeester,	didaktisch medewerker aan het Paedagogisch Centrum van de Gemeente 's-Gravenhage.
Drs. W. J. Brandenburg,	leraar aan het Heymans-lyceum te Groningen,
Dr. P. M. van Hiele,	leraar aan het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

In het volledige programma is op de zondagmorgen gelegenheid voor kerkgang vrijgehouden.

De kosten voor het weekeinde bedragen (logies en maaltijden inbegrepen) ƒ 7,50 voor werkgroep of W.V.O.-leden en ƒ 10,— voor niet-leden. Het Ministerie voor Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen heeft een subsidie ter bestrijding van een gedeelte van de reiskosten toegezegd voor die deelnemers, die werkzaam zijn aan een school voor L.O., U.L.O., V.H.M.O. of aan een Kweekschool.

Verdere inlichtingen en aanmeldingen bij Drs. Hermen J. Jacobs jr., Sekretaris-penningmeester van de Wiskunde Werkgroep, Spreeuwenlaan 11, Den Haag, tel. 337174, giro 614418. Betaling s.v.p. gelijktijdig bij de aanmelding.

(2.3) $$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \quad \cos x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2\nu!}$$

kan toch eigenlijk niet bevredigend geacht worden.

Een interessante mogelijkheid voor de invoering van de goniometrische functies bieden de functionaalvergelijkingen

(2.4) $$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

gecombineerd met de continuiteitsveronderstelling

(2.5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Wanneer we de existentie van functies $\sin x$ en $\cos x$, die aan (2.4) en (2.5) voldoen postuleren kunnen uit deze relaties onmiddellijk alle formules van de klassieke goniometrie afgeleid worden. We mogen wel verwijzen naar enkele onderzoekingen van J. G. van der Corput en J. C. H. Gerretsen:

J. C. H. Gerretsen: De karakteriseering van de goniometrische functies door middel van een functionaal betrekking. Euclides 16 (1939) 92—99.

J. G. van der Corput: Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaal betrekking. Euclides 17 (1940) 55—75.

J. G. van der Corput: A remarkable family. Euclides 18 (1941) 50—78.

§ 3. *Standpunt 2: de meetkunde.*

A. We rekenen eenvoudig, uitgaande van de normale meetkundige definitie. We proberen de sinus te karakteriseren door $\frac{k}{a}$ uit te drukken in $\frac{x}{a}$ en $\frac{y}{b}$. We schrijven voorlopig $\lambda(\alpha) = \frac{x}{a}$, $\lambda(\beta) = \frac{y}{b}$, $\lambda(\alpha+\beta) = \frac{k}{a}$. We beschouwen nu figuur 1, en vinden

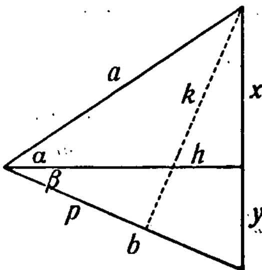


Fig. 1

$$kb = h(x+y)$$

$$\frac{k}{a} = \frac{x}{a} \cdot \frac{h}{b} + \frac{y}{b} \cdot \frac{h}{a}$$

omdat

$$\frac{h}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}, \quad \frac{h}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

vinden we dus

(3.1) $$\lambda(\alpha+\beta) = \lambda(\alpha)\sqrt{1-\lambda^2(\beta)} + \lambda(\beta)\sqrt{1-\lambda^2(\alpha)}.$$

Dit is een wel zeer onprettige functionaalvergelijking, in de wortelvormen is altijd een tekendreiging. Wanneer we λ differentieerbaar veronderstellen, kunnen we door naar α te differentiëren en daarna $\alpha = 0$ te stellen uit de vergelijking (3.1) afleiden

(3.2) $$\lambda'(\beta) = \lambda'(0) \cdot \sqrt{1 - \lambda^2(\beta)}.$$

We zouden dan deze differentiaalvergelijking verder moeten bestuderen.

We merken nog even op dat we uitgaande van $\mu(\alpha) = \frac{x}{h}$, $\mu(\beta) = \frac{y}{h}$, $\mu(\alpha + \beta) = \frac{k}{p}$ tot de eenvoudiger vergelijking

(3.3) $$\mu(\alpha + \beta) = [\mu(\alpha) + \mu(\beta)] \cdot [1 - \mu(\alpha)\ \mu(\beta)]^{-1}$$

komen, die weer aanleiding geeft, voor differentieerbare functies μ tot een differentiaalvergelijking

(3.4) $$\mu'(\alpha) = \mu'(0)\ [1 + \mu^2(\alpha)].$$

We merken nog op dat de differentiaalvergelijkingen (3.2) en (3.4) wegens het niet expliciet voorkomen van de onafhankelijke variabele tot eenvoudige kwadraturen (d.i. bepaalde integraties) zijn terug te voeren. Met andere woorden: door $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ en $\int \frac{dt}{1+t^2}$ worden de functies arcsin en arctg geïntroduceerd. We merken nog op dat omgekeerd uit de definitie $\varphi(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ direct volgt

$$\varphi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{(de inverse van (3.3)!).}$$

We vinden deze relatie door in $\int_0^v \frac{dt}{1+t^2}$ de substitutie $t = \frac{t'-x}{1+xt'}$ in te voeren.

B. Een geheel andere meetkundige introductie verkrijgen we door beschouwingen uit het projectieve complexe vlak. De goniometrische functies zijn functies van een hoek, d.w.z. we zoeken een invariant van twee lijnen onder alle translaties en rotaties, anders gezegd bij alle projectieve transformaties die I en J (de isotrope punten op de oneigenlijke lijn) vast laten. Als A en B de oneigenlijke punten van de benen van de hoek zijn zal de dubbelverhouding (A B I J) zo'n invariant zijn. We merken op dat (A B I J) de hoek slechts op een gestrekte hoek nauwkeurig vast legt.

De direct uit de definitie van dubbelverhouding volgende relatie

$$(3.5) \qquad (\mathrm{A\,C\,I\,J}) = (\mathrm{A\,B\,I\,J}) \cdot (\mathrm{B\,C\,I\,J})$$

voert ons tot de bestudering van de functionaalvergelijking:

$$(3.6) \qquad \varepsilon(\alpha + \beta) = \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon(\beta).$$

We kunnen deze functionaalvergelijking met vrij minimale extra eisen oplossen. We veronderstellen dat $\varepsilon(x)$ integreerbaar is (eventueel in de zin van Lebesgue) en dat $\int_0^t \varepsilon(x)dx$ niet identiek nul is (aan deze laatste voorwaarde is in ons geval zeker voldaan).

Laat nu $\delta(t) = \int_0^t \varepsilon(x)\,dx \neq 0$, dan

$$(3.7) \qquad \int_\beta^{\beta+t} \varepsilon(u)\,du = \varepsilon(\beta) \int_0^t \varepsilon(u)\,du$$

dus

$$\varepsilon(\beta) = \frac{\delta(\beta + t) - \delta(\beta)}{\delta(t)}.$$

We zien dus, omdat δ continu is, dat ε continu is. Dan is echter δ differentieerbaar en dus ook ε differentieerbaar. We vinden dan uit (3.6)

$$(3.8) \qquad \varepsilon'(\alpha) = \varepsilon(\alpha) \cdot \varepsilon'(0).$$

We merken op dat $|(\mathrm{A\,B\,I\,J})| = 1$, dus $|\varepsilon(\alpha)| = 1$. Staat de exponentiële functie in het complexe vlak ter beschikking dan vinden we direct

$$\varepsilon(\alpha) = e^{ic\alpha} \text{ met een reële constante } c.$$

Stellen we $\varepsilon(\alpha) = u(\alpha) + iv(\alpha)$ met reële u en v, dan kunnen we uit (3.6) afleiden $u'(0) = 0$ en $u''(\alpha) = -[v'(0)]\,u(\alpha)$, omdat ε ook twee keer differentieerbaar is. We komen dan dus weer bij een reële differentiaalvergelijking terecht.

§ 4. *Standpunt 3: Analyse met een meetkundige inslag.*

Laat een functie f op een segment $[a, b]$ van begrensde variatie zijn. Dan kunnen we de lengte van de grafische voorstelling van $y = f(x)$ tussen $x = a$ en $x = b$ met behulp van een verdeling $\{x_\nu\}$ definiëren als

$$\sup \sum_{\nu=0}^{n-1} \sqrt{(x_\nu - x_{\nu+1})^2 + [f(x_\nu) - f(x_{\nu+1})]^2}.$$

Nu is $y = \sqrt{1 - x^2}$ zowel op $[-1,0]$ als op $[0,1]$ een monotone functie, die vanzelfsprekend van begrensde variatie is. We kunnen

dus de lengte van de cirkelboog tussen $x = t$ en $x = 1$ definiëren, laat deze lengte $s(t)$ zijn.

Direct ziet men in dat s een continue functie is, die monotoon daalt voor $t \in [-1, +1]$. Er is dus een continue en monotone inverse, die we aangeven met $t = \cos s$. Als t loopt van -1 tot $+1$ varieert $s(t)$ van een zekere constante (π) tot 0. De functie $\cos s$ is dus alleen gedefinieerd voor $s \in [0, \pi]$, en we moeten hem nog op passende wijze voor andere waarden van s definiëren.

Deze introductie van de goniometrische functies is bizonder elegant, een bezwaar is dat een eenvoudige afleiding van de klassieke formules (b.v. de additieformules) zonder wat elementaire meetkunde niet goed mogelijk is.

Wanneer we i.p.v. de lengte van de boog, de oppervlakte van de sector gebruiken komen we tot analoge beschouwingen.

§ 5. *Standpunt 4: de moderne abstractie.*

We geven nu een mogelijke introductie van de goniometrische functie op abstract algebraïsch-topologische grondslag, die we ontlenen aan het leerboek van N. Bourbaki (Éléments de mathématiques, Topologie générale, chap. V t/m VIII). We beperken ons tot de introductie van een functie $y = e^{ix}$, waaruit we de goniometrische functies direct afleiden.

De complexe getallen zijn paren reële getallen, algebraïsch gesproken een produkt $R \times R$ (R is de verzameling van de reële getallen). De topologie van de complexe getallen kan via omgevingen ingevoerd worden als produkt van de topologie van de reële rechte met zichzelf. Anders gezegd als omgevingen van (x_0, y_0) kiezen we alle paren (x, y) met $|x - x_0| < \varepsilon$ en $|y - y_0| < \varepsilon$. We beschouwen nu de ondergroep U van de vermenigvuldiggroep C^* van de complexe getallen $\neq 0$, die bestaat uit alle getallen $\alpha + \beta i$ met $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Het is duidelijk dat een omgeving van de eenheid van deze groep *topologisch* equivalent (homeomorf dus) is met een interval van de reële getallenrechte. Nu gebruikt Bourbaki een vrij diep liggende *stelling*:

„Als een topologische groep G samenhangend en compact is en een omgeving bezit die homeomorf is met een interval dan is deze groep *isomorf* (dus *algebraïsch* equivalent) met de optelgroep T van de reële getallen modulo 1."

Dus is U isomorf met T, omdat T slechts 2 automorfismen kent (nl. $x \to x$ en $x \to -x$) zijn er maar twee afbeeldingen $U \to T$, die het isomorfisme leveren. We kiezen nu g ($T \to U$) zó, dat

$g(\frac{1}{4}) = i$. Iedere continue afbeelding van de reële getallen op T is van de gedaante $\varphi(ax)$ als φ aan ieder reëel getal zijn restklasse modulo 1 toevoegt. Nu is $g\left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right)$ een homomorfe afbeelding van de reële getallen op de groep U, bij geschikte keuze van a is dit juist de functie $y = e^{ix}$.

§ 6. *Generalisatie.*

We behandelen nog enkele facetten van generalisaties van de goniometrische functies. We kunnen verschillende uitgangspunten nemen. Eén mogelijkheid is periodiciteitseigenschappen te bezien. Alle nulpunten van de functie sin z zijn veelvouden van het getal π. Laten nu twee complexe getallen ω_1 en ω_2 gegeven zijn met een niet reële verhouding. We zoeken een functie met nulpunten $n\omega_1 + m\omega_2$ voor alle gehele getallen n en m. We kunnen deze b.v. introduceren via oneindige produkten. Laten we ter afkorting schrijven $n\omega_1 + m\omega_2 = \Omega$. Een accent bij een produkt wil zeggen dat de factor met $n = 0$ resp. met $n = m = 0$ weggelaten moet worden. We stellen nu naast elkaar:

(we sommeren over k van $-\infty$ tot $+\infty$ (e.v. met uitzondering van $k = 0$) en over $\Omega = n\omega_1 + m\omega_2$ en n, m van $-\infty$ tot $+\infty$ (ev. met uitzondering van $n = m = 0$))

$\sin z = z \prod_k{}' \left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}}$	$\sigma(z) = z \prod_\Omega{}' \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{\Omega^2}}$
$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_k{}' \left\{\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right\}$	$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_\Omega{}' \left\{\frac{1}{z - \Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2}\right\}$
$-(\operatorname{cotg} z)' = \sum_k \frac{1}{(z - k\pi)^2}$	$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_\Omega{}' \left\{\frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right\}$
	$\wp'(z) = -2 \sum_\Omega{}' \frac{1}{(z - \Omega)^3}$

Nu gelden de volgende betrekkingen:

$(\operatorname{cotg} z)' = -\operatorname{cotg}^2 z - 1$	$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3 + A\wp + B$
	$A = -60 \sum_\Omega{}' \frac{1}{\Omega^4}$
	$B = -140 \sum_\Omega{}' \frac{1}{\Omega^6}$

We zien dus een grote analogie tussen de goniometrische en de

elliptische functies, zo is cotg z periodiek met periode π, $\wp(z)$ is dubbelperiodiek met perioden ω_1 en ω_2.

Wanneer we een kegelsnede in parametervorm willen schrijven kunnen we dit steeds doen door voor de coördinaten goniometrische functies van de parameter t te kiezen, voor kubische krommen kunnen we steeds elliptische functies kiezen. In het algemeen zijn krommen van het geslacht nul met goniometrische (en ook met rationale) functies te parametriseren en krommen van het geslacht één met elliptische functies. Het geslacht van een kromme is grof gezegd het verschil van het maximaal mogelijke aantal dubbelpunten (zonder dat de kromme ontaardt) en het aantal aanwezige dubbelpunten; wanneer gecompliceerdere punten zoals keerpunten etc. voorkomen is de definitie iets gecompliceerder (Formules van Plücker!). Een kegelsnede, kubische kromme met één dubbelpunt en vierdegraads kromme met 3 dubbelpunten hebben het geslacht 0. Een kubische kromme zonder dubbelpunt heeft het geslacht 1.

Wanneer we de vierdegraads kromme $y^2 = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)$ bestuderen kunnen we deze ook in parametervorm brengen met elliptische functies. De functies, die dan naar voren komen zijn een andere directe generalisatie van de goniometrische functies. We vinden als mogelijke parametervoorstelling $x = sn\ t$, $y = sn'\ t$ met

$$sn\ t = \frac{1}{\varkappa}\{\zeta(t + ik') - \zeta(t + 2k + ik') - \zeta(ik') + \zeta(2k + ik')\}$$

waarbij

$$k = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)}}, \qquad k' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varkappa'^2 x^2)}};$$

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1.$$

De volgende formules zijn generalisaties van bekende zaken:

$$(sn' t)^2 = (1 - sn^2 t)(1 - \varkappa^2 sn^2 t) \qquad sn^2 t + cn^2 t = 1$$

$$(cn' t)^2 = (1 - cn^2 t)(\varkappa'^2 + \varkappa^2 cn^2 t) \qquad dn^2 t + \varkappa^2 sn^2 t = 1$$

$$(dn' t)^2 = -(1 - dn^2 t)(\varkappa'^2 - dn^2 t) \qquad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1.$$

Een andere methode, we mogen hierbij naar Gauss verwijzen, gaat uit van de lemniscaat en de bepaling van de lengte van een boog. De vergelijking van de lemniscaat is $r^2 = \cos 2\varphi$; stellen we de integraal voor de booglengte op dan komen we tot een integraal

$$s = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

(Vergelijk de cirkel, waarbij we tot $\int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ gevoerd worden).

We vinden dan voor de inverse van $s(x)$

$$x(s) = cn\, s\sqrt{2} \text{ voor } \varkappa = \varkappa' = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

want

$$[x'(s)]^2 = [1 - x^2(s)] \cdot [1 + x^2(s)].$$

Terloops merken we nog op dat de totale omtrek van de lemniscaat, een constante die t.o.v. van deze problemen dezelfde rol speelt als π in de goniometrie afgeleid kan worden door gebruik te maken van

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \tfrac{1}{4}\int_0^1 u^{-3/4}(1-u)^{-1/2}\,du = \tfrac{1}{4}\mathrm{B}(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{4\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Tenslotte wijzen we nog op een topologisch facet van de generalisatie van enkelvoudig- naar dubbelperiodieke functies. Het

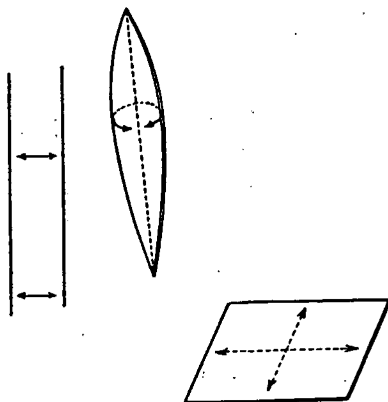


Fig. 2

fundamentaal gebied van een enkelvoudig periodieke functie in het complexe vlak (eigenlijk op de complexe bol) is een strook, die na de voorgeschreven randidentificaties met een *bol* topologisch equivalent is (denk aan een bolvormig uitvouwbare lampion). Voor een dubbelperiodieke functie is dit een parallelogram, dat met een *torus* equivalent is (identificatie van 2 overstaande zijden geeft een cilinder, de identificatie van de randcirkels geeft dan de torus) (zie figuur 2).

Het Riemann oppervlak van $y^2 = (1 - x^2)$ is, zoals ook door het aanbrengen van een coupure en een lijmconstructie van twee

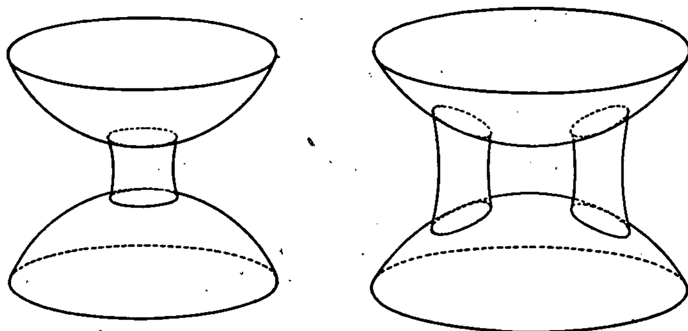


Fig. 3

bladen direct in te zien is, topologisch een bol; dat van

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - \varkappa^2 x^2)$$

is een torus (zie figuur 3).

GAUSS EN WEBER

In de kelders van het Physisch instituut van de universiteit van Göttingen bevinden zich nog enkele reminiscenties aan Gauss.

O.a. een facsimile van de eerste telegraaf, die door Gauss en Weber gebruikt is. Aan de wand hangt een afschrift van de correspondentie, die Weber met de burgemeester van Göttingen heeft gevoerd om toestemming te krijgen voor het spannen van de draad. De curieuse, serviele stijl trok mijn aandacht; uit eigen beweging bood toen de directeur, dr. K. Barth, aan een fotocopie te laten maken, en die naar mijn adres op te zenden. Hij heeft woord gehouden; mogelijk vinden sommige lezers het geval even grappig als ik.

C. J. Alders

Herstellung

des

ersten elektrischen Telegraphen

Göttingen 1833

Schriftstücke von Wilhelm Weber

1.

Wilhelm Weber an den Magistratsdirector Ebell.

Hochwohlgeborner Herr,
Hochzuverehrender Herr Director.

Ew. Hochwohlgeboren beehre ich mich, gehorsamst anzuzeigen, daß ich, zum Zwecke einer wissenschaftlichen Unternehmung, einen doppelten Bindfaden von dem mir untergebenen physikalischen Kabinet auf den hiesigen Johannisthurm und von da weiter zur Sternwarte habe aufspannen lassen, — und verbinde damit die ergebenste Bitte, daß Sie diesem Unternehmen, welches nicht ohne Interesse für die Wissenschaft ist, möglichst Ihren Schutz angedeihen lassen mögen, sowohl dadurch, daß Sie gestatten, daß der genannte Bindfaden einige Zeit am Johannisthurm angeknüpft bleibe, als besonders dadurch, daß Sie den Polizeibeamten, Nachtwächtern u. s. w. gütigst einige Aufmerksamkeit anempfehlen, daß nicht durch Muthwillen ein Schade daran geschieht.

Uebrigens habe ich die Ehre, hiebei zu bemerken, daß meines Wissens beim Aufknüpfen des Bindfadens am Johannisthurm nichts weiter erforderlich gewesen ist, als den Laden von einer Fensteröffnung zu entfernen, welches in meiner Abwesenheit geschehen ist, — sonst würde ich Ew. Hochwohlgeboren Genehmigung vorher eingeholt haben.

Der Zweck der Sache ist darauf gerichtet, die Kräfte des Galvanismus und Magnetismus, so weit sie zu practischen Zwecken irgend einmal dienen könnten, im Großen näher zu untersuchen.

Nur Uebelwollen oder völlige Unkenntniß können Gerüchte verbreiten, als sey mit dieser Vorrichtung Gefahr irgend einer Art, z. B. bei Gewittern, verbunden.

Ich zweifle nicht, daß Ew. Hochwohlgeboren und der übrige Hochlöbliche Magistrat dem Gutachten der an hiesiger Universität angestellten sachverständigen Männer ein hinreichendes Zutrauen in dieser Beziehung schenken werden. Ich bin im Stande Ew. Hochwohlgeboren wegen solcher Gefahren völlig zu beruhigen, wenn auch mehrere solcher Schnüren oder feiner Drähte über die Häuser aufgespannt würden.

Ew. Hochwohlgeboren werden gütigst entschuldigen, daß ich nicht früher eine Anzeige über diese geringfügige Angelegenheit gemacht habe — bei der Schnelligkeit der Ausführung und in der Ueberzeugung, daß von Ew. Hochwohlgeboren Seite kein Bedenken stattfinden werde, war die Nothwendigkeit derselben meiner Aufmerksamkeit entgangen.

Empfangen Sie gütigst die Versicherung meiner größesten Hochachtung, mit der ich zu verharren die Ehre habe.

Ew. Hochwohlgeboren

Göttingen,
den 15. April 1833

gehorsamster Diener,
Wilhelm Weber,
Director des physikalischen Cabinets
hiesiger Universität

2.

Der Göttinger Magistrat an Wilhelm Weber.

Ew. Wohlgeboren sind durch das gefällige, an den Magistrats-Director Ebell gerichtete, von diesem aber an den Magistrat abgegebene Schreiben vom 15/16. huj. einer bereits beabsichtigten Anfrage über den Zweck der auf dem Johannis-Thurme ohne unser Vorwissen gemachten Vorrichtungen zuvor gekommen. Wenngleich wir nun jederzeit gern bereit sind, zur Einrichtung und Förderung wissenschaftlicher Institute nach Kräften die Hand zu bieten, so müssen wir uns für den vorliegenden Fall jedoch Pflichten-halber dennoch eine gefällige Erläuterung über die nachfolgenden Punkte erbitten.

1) Sind die gemachten Vorkehrungen nur als eine Probe zu betrachten, oder sollen sie bleibend werden?

2) Wird es deßhalb erforderlich werden, einzelnen Personen, und welchen, jederzeit den Zugang zu dem Thurme zu gestatten?

3) Werden die jetzt gezogenen Linien durch Drähte ergänzt werden, und von welchem Metall werden solche seyn?

4) Ist es erforderlich, daß die schon jetzt beseitigten Jalousien vor den Thurmöffnungen, auch für die Folge hinwegfallen, und die fraglichen Luken offen bleiben müssen?

Indem wir uns darüber eine baldgefällige Benachrichtigung erbitten, bemerken wir hinsichtlich des letzten Punktes schon im Voraus, daß der Thurm zu sehr der Einwirkung des Wetters ausgesetzt ist, als daß wir ohne zu großen Nachtheil für die innern Bauwerke das Offenbleiben der Dachluken gestatten könnten.

Wir benutzen übrigens diese Gelegenheit, Ew. Wohlgeboren die Versicherung unserer vollkommensten Hochachtung zu ertheilen.

Göttingen, den 18. April 1833.

Der Magistrat der Stadt Göttingen.
G. C. E. Ebell Dr.

3.

Wilhelm Weber an den Göttinger Magistrat.

Ein Hochlöblicher Magistrat der Stadt Göttingen hat in einem an den Unterzeichneten gerichteten Schreiben vom 18. April einige Erläuterungen gütigst verlangt, um entscheiden zu können, ob Derselbe der zu einer wissenschaftlichen Unternehmung von mir an den Herrn Magistrats-Director Ebell gerichteten Bitte willfahren könne. — Ich habe die Ehre Folgendes darauf zu erwiedern, nämlich

ad 1. Die gemachten Vorkehrungen sind nicht als bleibend zu betrachten, sondern können beseitigt werden, sobald die damit beabsichtigten Versuche angestellt und deren Erfolg außer Zweifel gesetzt worden.

ad 2. Nachdem die Schnüre einmal aufgespannt sind, wird die Anwesenheit eines Beobachters während der Versuche nicht erfordert, wie überhaupt von diesen Versuchen außer dem physikalischen Cabinet und der Sternwarte nichts sichtbar wird. Nur beim Beginn jeder neuen Reihe von Versuchen suche ich für meine und meines Gehülfen Person um die Erlaubniß, auf dem Thurme mich aufzuhalten, nach.

ad 3. Der aufgespannte Bindfaden soll dazu dienen, einen feinen Metalldraht frei schwebend zu erhalten. Die Dicke dieses Drahtes übersteigt nicht viel die eines Haares und vermag nur ganz schwache galvanische Ströme zu fassen und fortzuleiten. Dieser Draht besteht aus Silber und Kupfer. Er ist, verbunden mit dem Bindfaden, dem bloßen Auge für sich allein nicht sichtbar.

ad 4. Die Thurm-Oeffnungen können verschlossen seyn, und ich werde, dem vom Hochlöblichen Magistrate ausgesprochenen Willen gemäß, Sorge tragen, daß dieser Verschluß schon in den nächsten Tagen wiederhergestellt wird.

Indem ich Einen Hochlöblichen Magistrat zu bitten die Ehre habe, diesem Unternehmen möglichst freien Gang zu gestatten, und so viel thunlich Schutz angedeihen zu lassen, verbinde ich damit die Versicherung, daß ich diese Verwilligung mit dem größten Danke meinerseits anzuerkennen wissen werde, der ich mit der größten Hochachtung zu verharren die Ehre habe

Eines Hochlöblichen Stadt-Magistrats

Göttingen,
den 20. April 1833

gehorsamster Diener,
Wilhelm Weber
Professor an hiesiger Universität

4.

Der Göttinger Magistrat an Wilhelm Weber

Unter den von Ew. Wohlgeboren uns gegebenen Erläuterungen lassen wir die auf dem Johannis-Thurme gemachten Vorrichtungen zu magnetisch-galvanischen Beobachtungen bis auf weiteres gern geschehen, sowie wir auch nichts dabey zu erinnern finden, daß Ew. Wohlgeboren behufs dieser Beobachtungen sich mit einem Gehülfen dann und wann auf dem Thurme aufhalten. Unter Versicherung unserer vollkommensten Hochachtung

Göttingen, den 6. May 1833.

Der Magistrat der Stadt Göttingen.
G. C. E. Ebell. Dr.

*

Göttingische gelehrte Anzeigen 1834 Seite 1272 (Mittheilung von C. F. Gauß über die Errichtung des Magnetischen Observatoriums): „Wir können hierbei eine mit den beschriebenen Einrichtungen in genauer Verbindung stehende großartige und bisher in ihrer Art einzige Anlage nicht unerwähnt lassen, die wir unserm Herrn Professor Weber verdanken etc. —

Die in Rede stehende Leitung wurde in den ersten Jahren ein paar mal neu hergerichtet; nach 1837, nachdem Weber als einer der „Sieben" seines Amtes entsetzt worden war, verkam sie. Sie hat dann noch existirt bis zum 16. Decbr. 1845, wo in einem Unwetter, das am Nachmittag jenes Tages weit herum auftrat, sie ein Blitzschlag zerstörte. In Goslar schlug während desselben Unwetters der Blitz in den Stephani-Kirchthurm, zündete und vernichtete die Spitze desselben. Für den Göttinger Johannisthurm sind an jenem Tage die an ihm befindlichen Telegraphendrähte und ihre Zerstörung aller Wahrscheinlichkeit nach zur Rettung geworden, indem der auf den Thurm aufgefallene sehr starke Blitzschlag, da der Thurm sonst gar keine Ableitung darbot, nur durch die Drähte Auswege fand nach den Blitzableitern auf der Bibliothek und dem Entbindungshause hinüber, resp. an einer Regenrinne an der Universitätsapotheke hinab. Hannoversche Zeitung No. 301 und No. 302, vom 17. resp. 18. Dec. 1845, Seite 1790 und 1798; Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, Band 5, Altona 1863, Seite 96.

Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner) in Göttingen.

NOTULEN VAN DE LEDENVERGADERING VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L. OP VRIJDAG 30 AUGUSTUS 1957 IN HET EYKMANHUIS TE DRIEBERGEN.

Om 14.30 opende de heer Leujes de vergadering en heette in het bijzonder welkom: de heren Roodenburg en Koning (bestuur Genootschap), Hufferman en De Jong (Wimecos), Verkroost (Velines), Jacobs (Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.), Lenstra (Red. Euclides), Dr. Schrek (erelid), De Vries en Slotboom (sprekers). Hij deelde mee, dat enkele bestuursleden en genodigden niet aanwezig konden zijn, o.a. door de vakantiecursus van Velines te Groningen.

De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd.

Vervolgens kreeg de heer L. de Vries, directeur van de Stichting Technisch Filmcentrum, het woord. Hij vertelde iets over de ontwikkeling van de Stichting, waaruit bleek, dat de belangstelling ook naar andere gebieden dan het technisch onderwijs is gericht. Speciaal is de vraag gesteld, of film en filmstrip bij het moeilijke vak wiskunde kunnen helpen. Daartoe is eerst nagegaan, wat er hier en in het buitenland reeds bestaat. Dat was op enkele goede films na niet veel. Wel zijn er in Amerika en Engeland verscheidene strips gemaakt, maar deze waren volgens de heer Leujes, die ze op verzoek van het Technisch Filmcentrum bekeken heeft, waardeloos voor het Nederlandse V.H.M.O. Toch wilde spreker er iets van laten zien. Misschien kon er een goed idee uit groeien. Het eerste filmpje, dat nu werd vertoond, was door het Technisch Filmcentrum zelf gemaakt ten behoeve van technische scholen; onderwerp: Amerikaanse projectie; duur: 5 minuten; kosten: ƒ 10.000,—. Men vond, dat alles te vlug ging, maar een rustiger tempo zou de film nog veel duurder gemaakt hebben. Bezwaren tegen de gesproken tekst kon spreker eenvoudig opheffen door op te merken, dat de film ook zonder geluid gedraaid kan worden. Als tweede werd de door velen reeds gekende film „Meetkundige plaatsen" van Cantagrel-Jaquemard vertoond. Het laatste deel hiervan had misschien beter achterwege kunnen blijven: dat gaat wat te ver. Overigens was het oordeel over deze film algemeen gunstig. Dit was niet het geval met de filmstrips, die daarna vertoond werden. De eerste, een Engelse

over oppervlakten en gelijkvormigheid, bestond uit een reeks mooie gekleurde figuren. Het waren echter figuren, die ook in de meeste leerboeken staan en wat de kleuren betreft, zo werd uit de vergadering opgemerkt, kunnen de leerlingen dat beter zelf doen in hun schrift. Ook de tweede strip, een Amerikaanse over het nut van de wiskunde kreeg geen goede pers. De derde was een Engelse over de geschiedenis van de cijfers. Veel ervan staat in het boek van Bunt c.s. (Van Ahmes tot Euclides); maar voor iemand die occasioneel iets over dit onderwerp in de klas zou willen vertellen, zou deze strip misschien te gebruiken zijn. Ten slotte werd een Nederlandse strip, uitgebracht door Polygoon, vertoond. Deze inleiding tot (niet-wiskundige) grafieken werd in deze vorm niet bijzonder geapprecieerd.

Ir. Geerts meende, dat de filmstrip bij ingewikkelde tekeningen in de Beschrijvende Meetkunde wel nuttig kon zijn. Dit was het enige positieve geluid uit de vergadering.

De voorzitter dankte de heer De Vries en zijn medewerker voor alle moeite, die zij zich getroost hadden om zoveel materiaal te vertonen. Het speet hem, dat er nog weinig resultaat te boeken was; hij sprak echter de hoop uit, dat mede door het contact tussen het Technisch Filmcentrum en Liwenagel iets bruikbaars gevonden zou worden.

Na de thee besprak de heer Slotboom de wiskunde-examenopgaven gymnasium-B 1957. Van de Meetkunde vond hij opgave 1 te gemakkelijk. Opgave 2 vond hij vrij eenvoudig, hetgeen de vergadering niet met hem eens was. Over opgave 3 verschilden de meningen niet: een geschikt vraagstuk. Al met al vond spreker het Meetkunde-werk gemakkelijk. Opgemerkt werd nog, dat het werk wat eenzijdig was; er kwam bijvoorbeeld geen berekening in voor.

Van de Trigonometrie en Analytische Meetkunde vond spreker het tweede vraagstuk het minst geslaagd: het was steeds hetzelfde. Overigens was het aardig werk en niet te moeilijk. De vergadering was het daarmee eens.

Het Algebra-werk vond spreker meer een test dan gewone opgaven. Vraagstuk 1 ging nog wel, daar werken met absolute waarden in de mode is en iedereen er dus wel aandacht aan besteed had. Bovendien stond deze opgave met een kleine variatie in de 250 opgaven van de Wimecos-commissie. Daarin werd echter eerst gevraagd naar de herleiding van de functie. De vergadering was van oordeel, dat het vraagstuk zo mooier was geweest; nu was een grafiek zonder toelichting voldoende. Het tweede vraagstuk was

moeilijk, ten minste het tweede deel. Bovendien was het misleidend: er had gevraagd moeten worden naar twee verschillende *reële* wortels. Ook had boven het hele werk kunnen staan, dat alleen het reële getallengebied werd beschouwd. Ook de derde opgave was lastig en zat vol voetangels en klemmen, hetgeen bij de bespreking wel bleek.

Resumerende kwam de heer Slotboom tot de conclusie, dat het hele werk acceptabel was en zeker niet beneden peil.

De voorzitter dankte de spreker voor het feit, dat hij bereid was geweest deze inleiding te houden en voor de prettige manier, waarop hij dit had gedaan.

Bij de rondvraag vroeg de heer Roodenburg, of het bestuur van Liwenagel al een mening had gevormd over het wetsvoorstel ter verruiming van de rechten van het B-diploma. Het antwoord moest ontkennend luiden.

Nadat de heren Verkroost, Hufferman, Jacobs en Roodenburg hun dank hadden betuigd voor de ontvangen uitnodiging, werd de vergadering om 17.10 gesloten.

De secretaris,
D. LEUJES.

OPLEIDING M.O. NATUURKUNDE

Aan de Rijksuniversiteit te Utrecht zal — voor zover de plaatsruimte dit zal toelaten — met ingang van 1 oktober a.s. de mogelijkheid komen te bestaan tot het volgen van een opleiding voor de in te stellen M.O.-akte natuurkunde.

De opleiding zal verspreid over de gehele week tijdens de normale college- en practicum-uren plaats vinden.

Het moet echter niet uitgesloten geacht worden, dat bij voldoende belangstelling t.z.t. ook een opleiding in de avonduren en/of op woensdagmiddag en op zaterdag georganiseerd zal worden.

Wat betreft de vooropleiding wordt er van uit gegaan, dat de deelnemers ongeveer het eindexamenniveau H.B.S.-B bereikt hebben wat betreft de wis-, natuur- en scheikunde.

Verzoeken om inlichtingen resp. opgaven tot deelneming voor de dagcursus en berichten van belangstelling voor de avondcursus kunnen gezonden worden aan de administratie van het Fysisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat 6 te Utrecht.

BOEKBESPREKING

Prof. Dr. J. Hemelrijk en Ir. Doraline Wabeke, *Elementaire statistische opgaven met uitgewerkte oplossingen*. Noorduijn en Zoon, Gorinchem, 1957; 154 pag., *f* 10.—.

De studie van de mathematische statistiek heeft twee aspecten: de theoretische fundering en de praktische uitwerking. Aan het laatste is bovengenoemd werkje, dat als deel 2 in de Centrumreeks voor het Mathematisch Centrum is uitgegeven, gewijd. Bij de 100 opgaven zijn volledig uitgewerkte oplossingen gevoegd, terwijl van de gebruikte statistische methoden een „gebruiksaanwijzing" is opgenomen.

De opgaven hebben over het algemeen een bij uitstek praktisch karakter, zodat de kans groot is, dat men, indien men voor een bepaald probleem staat, een vraagstuk vindt, dat er bij aansluit. Bij enige steekproeven bleken de uitwerkingen duidelijk geredigeerd en correct.

Zonder te hebben nagegaan of deze steekproeven voldoende talrijk waren om op grond van deze resultaten een statistisch verantwoorde uitspraak te doen, durf ik het boekje met een gerust hart aan te bevelen ten gebruike bij de studie in de statistiek.

C. W. Wolfswinkel en J. Vermeer, *De exacte vakken op het eindexamen h.b.s.-B, II, Mechanica, Natuurkunde, Scheikunde*; Uitg. C. de Boer Jr., Amsterdam, 1957, 198 blz., *f* 6,25.

Afgedrukt zijn de eindexamenopgaven voor de genoemde vakken in de laatste 20 jaar, voorzien van aanwijzingen en antwoorden. Aan hen, die zich zelfstandig óf met weinig hulp voor het extraneï-examen voorbereiden, zal het boek nuttige diensten kunnen bewijzen. Het lijkt mij evenwel, dat voor onze dagscholen de bekende edities, die de opgaven voor alle vakken bevatten, de voorkeur verdienen. De docenten kunnen dan hun aanwijzingen en toelichtingen geheel op hun eigen wijze van lesgeven en op het gebruikte leerboek doen aansluiten. Wanneer wij onze leerlingen uitgaven als deze aan laten schaffen, wordt het boekenbudget, dat na de oorlog toch al zo moeilijk onder controle te houden blijkt, nòg meer belast en er staat naar mijn mening geen gelijkwaardige credit-post tegenover.

C. W. Wolfswinkel en J. Vermeer. *De exacte vakken op het eindexamen h.b.s.-B, I-A, Algebra en Gonio- en trigonometrie*. Uitg. C. de Boer Jr., Amsterdam, 1957, 152 blz., *f* 5.50.

Het hierboven staande over deel II was reeds geschreven, toen ik van dit deel 1-A kennis kon nemen. Ik kan niet volstaan met een korte verwijzing. Deel 1-A geeft zeker meer dan een overdrukje van de examenopgaven met enkele toevoegingen, die niet van zodanig belang zijn, dat wij hiervoor de in gebruik zijnde verzamelingen in de steek zullen laten.

De overzichten van de theorie van de algebra en de gonio- en trigonometrie vormen in dit deel de hoofdinhoud en de opgaven van 1937 af zijn tevens opgenomen. Zeker kunnen vele kandidaten hun voordeel doen met deze overzichten, waarin alle belangrijke punten zijn genoemd. Ook de voorbereiding voor het mondeling examen, waarbij de kandidaten „van 6 en lager" meestal geheel of grotendeels op zichzelf aangewezen zijn, kan er door gediend zijn. De prijs blijf ik hoog vinden.

Jean Chauvineau, *La logique moderne.* Presses universitaires de France (collection „Que sais-je?", 745), Paris, 1957, 128 pag., fr. 156.

Een inleiding, die vooral de mathematisch geschoolde lezer, die immers gewend is aan de omgang met formules en symbolen, in staat stelt de taal van de hedendaagse logica te leren lezen. De hoofdstukken I en II beschrijven wat de „logique proportionelle", resp. de „logique fonctionelle" omvatten; de hoofdstukken III en IV laten zien, hoe beide uitgebouwd worden ten behoeve van de deductie, dus b.v. het bewijzen van stellingen.

Voor wie belang stelt in de behandelde stof en bereid is zich extra te concentreren op deze „abstracte" lectuur, is dit beknopte en goedkope werkje zeker de moeite waard.

Vernieuwing van opvoeding en onderwijs, nr. 145. Muusses, Purmerend, juni 1957, 40 pag., *f* 1.50.

De jaarlijkse conferentie van de Werkgemeenschap voor vernieuwing van opvoeding en onderwijs (W.V.O.) op 8 en 9 november 1957 in Woudschoten zal tot doel hebben te onderzoeken, in hoeverre leermiddelen en leermethoden leerlingen van 10 tot 14 jaar tot geestelijke activiteit kunnen brengen. Deze conferentie is wel zeer degelijk voorbereid: een voorbereidingscommissie, een vóórconferentie met referenten en groepsleiders en nu dit nummer van „Vernieuwing". Niet minder dan elf artikelen belichten het te bestuderen onderwerp; elke deelnemer aan de conferentie is nu in staat, zich grondig te prepareren en met wèloverwogen meningen te komen. Ongetwijfeld bevordert dit het welslagen van de besprekingen beter dan wanneer het meeste, wat naar voren wordt gebracht, het resultaat is van de opwelling van een ogenblik.

Het spreekt vanzelf, dat een bespreking van de gehele inhoud hier niet kan worden verwacht. Natuurlijk las ik de bijdrage van mevrouw D. van Hiele-Geldof (van de gelegenheid maak ik gebruik haar van harte geluk te wensen met het feit, dat zij zich sinds kort mevrouw Dr. D. van Hiele-Geldof mag noemen!) over „Het activerende leermiddel in de wiskunde" met extra belangstelling. Veel opmerkingen in dit nummer zullen de lezer aanleiding geven tot het plaatsen van uitroeptekens en vraagtekens. Zo ging het mij ten minste en het lijkt mij toe, dat de conferentie straks zeker geen gebrek aan discussie-stof zal hebben.

H. W. Lenstra

Jos. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik.* I: Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. 200 blz. II: Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Aufbau der neuen Methoden. 109 blz. III: Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur Französischen Revolution. 107 blz. Sammlung Göschen 226, 875, 882. 1953—1957. Prijs per deeltje DM 2,40.

In drie deeltjes van de van ouds bekende Sammlung Göschen is thans de in 1953 begonnen geschiedenis der wiskunde van de Duitse wetenschapshistoricus Prof. J. E. Hofmann tot voltooiing gekomen, waarmee in een zeer beknopt bestek een ontzaglijke historische rijkdom bijeen is gebracht. De auteur vat er de vrucht van een gedurende lange jaren met onverzwakte werkkracht en onuitputtelijke volharding verrichte arbeid in samen. Iedere belangstellende kan zich hier voor een luttel bedrag laten voorlichten door de man die zonder twijfel als de grootste levende historicus der wiskunde van de gehele wereld beschouwd moet worden.

De behandeling begint in 3000 v. Chr. en gaat tot 1790 A.D. Naast de Europese beoefening der wiskunde wordt de Oosterse nergens veronachtzaamd. Zij beperkt zich niet tot de wiskunde in strikte zin, maar schenkt ook de nodige aandacht aan haar uitstralingen op andere gebieden van leven en denken en aan de invloeden die zij zelf van die gebieden heeft ondergaan. Voorzover dat practisch mogelijk en wenselijk is, komt ook de biografie van belangrijke figuren aan de orde.

Een enorm uitgebreide stof dus, die in een omvang van ruim 300 bladzijden tekst gecomprimeerd is. Men begrijpt het gevolg: een tot het uiterste geserreerde behandelingswijze, die van de lezer zeer veel ingespannen medewerking vereist. Uit de tekst zou geen woord meer geschrapt kunnen worden; de lezer zou grotere uitvoerigheid vaak dankbaar aanvaarden, maar moet nu de toelichtingen en uitwerkingen die dan mogelijk zouden zijn geweest, door eigen activiteit leveren. Het werk moet gelezen worden met de pen op papier en stelt dan vaak voor moeilijke problemen. Herhaaldelijk vat de auteur in enkele woorden wiskundige gedachtengangen samen, waarmee hij zelf volkomen vertrouwd is, maar die de minder ingewijde niet zo maar ineens kan overzien. Men zal er zich wellicht over verbazen, dat de behandeling met het jaar 1790 ophoudt. Laplace en Lagrange komen nog ter sprake, Gauss, Abel en Jacobi niet meer. De reden voor deze grens blijkt uit het boek zelf: voor de steeds uitvoeriger wordende en tot steeds hoger niveau opstijgende wiskunde der 19e eeuw zou de toegepaste wijze van uiteenzetting practisch onmogelijk worden en in een opsomming van namen en resultaten ontaarden, een euvel dat in het werk zoals het nu geworden is nog vermeden heeft kunnen blijven. Het is overigens bij iedere poging, de ontwikkeling van een wetenschap historisch te behandelen een moeilijke vraag, waar men moet ophouden, wil men niet gedwongen worden tot de huidige tijd door te gaan en inplaats van de geschiedenis van een vak de actuele stand ervan te gaan beschrijven.

Deze bespreking, waarin op de eigenlijke inhoud van het werk uiteraard niet kan worden ingegaan, zou onvolledig zijn, wanneer niet nog iets werd gezegd over de voortreffelijke wijze waarop de auteur zich van zijn bibliografische verplichtingen kwijt. Ieder hoofdstuk eindigt met een literatuuropgave voor verdere studie en aan het eind van ieder deeltje vindt men zeer uitvoerige en volledige registers van namen en geschriften. Deze beslaan voor de drie deeltjes samen niet minder dan 84 compres gedrukte bladzijden. De samenstelling ervan moet een zeer aanzienlijke arbeid hebben gekost, waarvoor echter iedere gebruiker de auteur dankbaar zal zijn.

Voor ieder die ook maar in enig opzicht met de geschiedenis der wiskunde te maken heeft, zullen deze drie Göschen-deeltjes een kostbaar bezit vormen, dat hij steeds bij de hand zal willen hebben.

E. J. Dijksterhuis

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

W.V.O.-CONFERENTIE

Voor bijzonderheden over deze conferentie, die op 8 en 9 november 1957 te Woudschoten zal worden gehouden, verwijzen wij naar het juninummer van „Vernieuwing". Zie ook de bespreking van dit nummer op blz. 62.

ELFDE AMSTERDAMSE UNIVERSITEITSDAG

Op zaterdag 19 oktober 1957 organiseert de Amsterdamse Universiteits-Vereniging voor de elfde maal een Universiteitsdag.

De deelnemers zullen des morgens te 11 uur precies in de Aula worden welkom geheten door de Voorzitter der Amsterdamse Universiteits-Vereniging: Dr. M. W. Holtrop, waarna de opening zal geschieden door de Rector Magnificus: Prof. Dr. M. W. Woerdeman.

Dan zal in de Aula een voor alle deelnemers bestemd college worden gegeven door Prof. Dr. A. H. W. Aten, Hoogleraar in de Radiochemie: „*Nut en gevaar van radioactieve isotopen*".

Des middags worden voor alle faculteiten interessante middagcolleges gehouden, voor de faculteit der wis- en natuurkunde door: Prof. Dr. J. A. A. Ketelaar, Prof. Dr. A. W. H. van Herk, Prof. Dr. Louise C. P. Kerling en Dr. G. de Vries.

De koffiemaaltijd in de Universiteit, evenals vorige jaren verzorgd door de Mensa Academica, sluit onmiddellijk aan de Aulavoordracht aan.

Na afloop der middagcolleges vindt een voor alle deelnemers aan deze dag bestemde bijeenkomst plaats in Krasnapolsky, Warmoesstraat, Amsterdam-C., van 6½ uur tot 8½ uur.

Tot slot van deze dag biedt het Bestuur van de A.U.V. de deelnemers een speciaal filmprogramma in Kriterion aan. Begin 9½ uur precies, einde ongeveer 11 uur.

Nadere inlichtingen zijn voor belangstellenden te verkrijgen aan het secretariaat der Amsterdamse Universiteits-Vereniging: Minervalaan 73^{III}.

MEDEDELING VAN DE PENNINGMEESTER VAN WIMECOS

De contributie bedraagt *f* 8,— per jaar, bij het begin van het verenigingsjaar te storten op postrekening 143917 ten name van Wimecos te Amsterdam.

Het verenigingsjaar loopt van 1 september t/m 31 augustus.

Aan degenen, die hun contributie nog niet hebben betaald, wordt verzocht dit te doen vóór 1 november a.s.